I. S. F. A. 2006-2007

Concours d'Entrée

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice autorisée

LES TROIS PROBLEMES SONT INDEPENDANTS

PROBLEME I

Soient un réel m et E l'ensemble des fonctions f continues et positives sur le segment [0,1], telles que :

$$\int_0^1 f(t)dt = 1 \qquad \int_0^1 t\times f(t)dt = m\ .$$

L'objet de l'exercice est de déterminer sur certains sous ensembles de E les fonctions f de ces sous ensembles qui maximisent l'intégrale $\int_0^1 (t-m)^2 f(t)dt$.

1. Montrer que les fonctions f de E qui maximisent l'intégrale $\int_0^1 (t-m)^2 f(t)dt$ sont aussi les fonctions f de E qui maximisent l'intégrale $\int_0^1 t^2 f(t)dt$.
2. Montrer que l'ensemble des réels $\left\{\int_0^1 t^2 f(t)dt; f\in E\right\}$ est majoré par 1. On note M la borne supérieure de cet ensemble. Montrer les inégalités $M \le m \le 1$.
3. On note par $I(\alpha,\beta)$ l'intégrale $\int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta dt$ où α et β sont deux réels positifs.

   a. Montrer les égalités :

   $$I(\alpha+1,\beta)+I(\alpha,\beta+1)=I(\alpha,\beta)$$
   $$I(\alpha+1,\beta)=\frac{\alpha+1}{\beta+1}I(\alpha,\beta+1)$$

   b. En déduire l'ensemble des fonctions $f_{\alpha,\beta}$ de la forme $f_{\alpha,\beta}(t)=c\times t^\alpha(1-t)^\beta$ qui appartiennent à ***E***. Déterminer également les fonctions de ***E*** de type $f_{\alpha,\beta}$ qui réalisent le maximum de $\int_0^1 t^2 f(t)dt$. (on sera amené à discuter suivant la position de m par rapport à 1/2).
4. Soient a , b, h , k 4 réels tels que $0<a<b<1$; h et k positifs et f la fonction définie sur le segment [0,1] par :

   $$f(t)=\begin{cases} 0 \ \ pour\ t\in[a,b] \\ f\ est\ linéaire\ affine\ sur\ les\ segments\ [0,a]\ et\ [b,1] \\ f(0)=h \ \ f(1)=k \end{cases}.$$

   Pour alléger les calculs on utilisera les résultats suivants :

   $$\begin{cases} \int_0^1 f(t)dt = \dfrac{ah}{2}+\dfrac{k(1-b)}{2} \\ \int_0^1 t\times f(t)dt = \dfrac{a^2h}{6}+\dfrac{k(1-b)(b+2)}{6} \\ \int_0^1 t^2\times f(t)dt = \dfrac{a^3h}{12}+\dfrac{k(1-b)(3+2b+b^2)}{12} \end{cases}$$

   Pour n entier supérieur à 2 on pose $a=1/n$ et $b=1-1/n$, et on note f_n la fonction associée. Exprimer les réels h et k en fonction de m et n pour que f_n soit élément de E.

   Déterminer les limites des suites : $u_n=\int_0^1 t^2 f_n(t)dt$; $v_n(t)=f_n(t)$ pour les fonctions f_n éléments de E.

   En déduire que la borne supérieure M est égale à m et qu'elle n'est pas atteinte.

PROBLEME II

Soit $\{p_1\ ,\ p_2\ ,..,\ p_n\}$ une famille de n réels positifs de somme égale à 1, ordonnée par valeur croissante : $p_1 \le p_2 \le .... \le p_n$

On définit les matrices M et N par les relations ci-dessous donnant leurs termes généraux

$$M_{i,i} = p_i(1-p_i)\ \ ;\ M_{i,j} = -p_i p_j \ \ pour\ i \ne j$$

$$N_{i,i} = 1-p_i\ \ ;\ N_{i,j} = -\sqrt{p_i p_j}\ \ pour\ i \ne j$$

1. Déterminer les vecteurs propres et valeurs propres de la matrice N :

Indication : On pourra écrire le système d'équations dont les solutions $(x_1,..,x_n)$ sont vecteurs propres et pour la résolution de ce système introduire l'inconnue auxiliaire $t = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i} \times x_i$.

2. Etude des vecteurs propres et valeurs propres de la matrice M :

On pourra reprendre l'indication de la question 1° mais en prenant cette fois comme inconnue auxiliaire $t = \sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i$

   a. Montrer que les sous espaces propres associés à toute valeur propre différente des réels p_i sont de dimension *1*. Montrer que 0 est valeur propre. Donner le sous espace propre associé.

   b. Pour cette question on suppose $0 < p_1 < p_2 < .... < p_n$.

   Montrer qu'aucun des réels p_i ne peut être valeur propre.

   Montrer que les valeurs propres non nulles sont solutions de l'équation :

$$g(\lambda) = 0 \quad avec\ g(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_i - \lambda}\ .$$

   Montrer que la matrice M a *n-1* valeurs propres non nulles (notées $\lambda_1,...,\lambda_{n-1}$) vérifiant :

$$p_1 < \lambda_1 < p_2 < \lambda_2 < .... < p_{n-1} < \lambda_{n-1} < p_n\ .$$

   c. Pour cette question on suppose que : $0 = p_1 = p_2 .... = p_r < p_{r+1} < .... < p_n$.

   Montrer que *0* est encore valeur propre. Préciser le sous espace propre associé. Donner sa dimension.

   d. Pour cette question on suppose que : $0 < p_1 = p_2 .... = p_r < p_{r+1} < .... < p_n$. $(r \le n)$.

   Montrer que $p_1 (=p_2 =..=p_r)$ est valeur propre. Préciser le sous espace propre associé. Donner sa dimension.

3. Montrer que M et N ont les mêmes sous espaces propres si et seulement si les réels p_i sont égaux.

PROBLÈME III

Rappels :

(i) - Une fonction f est dite convexe sur un intervalle ouvert I si pour tout couple (x,y) d'éléments de I on a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\ .$$

(ii) – Une fonction convexe sur I est continue sur I.

(iii) – Une fonction convexe possède en tout point x de I la propriété suivante :

- Sur son domaine de définition :

$$la\ fonction\ h \to \Delta_x(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\ \ est\ croissante$$

- Pour h>0 :

$$\Delta_x(-h) \le \lim_{h\to 0; h>0} \Delta_x(-h) (notée\ f_g'(x)) \le \lim_{h\to 0; h>0} \Delta_x(h)\ (notée\ f_d'(x)) \le \Delta_x(h)$$

(iv) – Si une fonction convexe est dérivable sa dérivée est croissante.

(v) - Si f est dérivable deux fois et si sa dérivée seconde est positive alors f est convexe.

A

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions ϕ définies sur $I =]-1, +\infty[$, convexes et telles que pour tout x de I **:**

$$\phi(x+1) = \phi(x) + ln(x+1) \ .$$

a. Montrer l'égalité $\phi(x) = \phi(x+n) - ln[(x+1)...(x+n)]$ pour n entier strictement positif.

b. Montrer en utilisant le rappel (ii) ci-dessus que pour x>0:

$$ln(x) = \phi(x) - \phi(x-1) \leq \phi'_g(x) \leq \phi'_d(x) \leq \phi(x+1) - \phi(x) = ln(x+1) \ .$$

c. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\phi'_d(x) - \phi'_g(x) \right] = 0$.

d. Déduire de b et c que la fonction ϕ est dérivable sur $]-1, +\infty[$.

B

Soit la suite de fonctions définies sur $]-1, +\infty[$ par :

$$u_n(x) = x\,ln\left[1+\frac{1}{n}\right] - ln\left[1+\frac{x}{n}\right]; \ n \text{ entier strictement positif} \ .$$

1. Montrer que la série de terme général $u_n(x)$ est convergente.

   On note $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ la suite des sommes partielles et $S(x)$ la somme de la série.

2. Montrer que l'on peut écrire $S_n(x)$ sous la forme :

   $$S_n(x) = ln(n!) + x\,ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} ln(x+k)$$

   En déduire que les fonctions $x \to S_n(x)$ sont convexes puis que la fonction S est aussi convexe.

3. Montrer que la fonction S est un élément de $\mathcal{F}$.

4. Montrer que pour tout x de I la suite $n \to S(x+n) - x\,ln(n+1) - ln(n!)$ a pour limite 0 .

5. Réciproque I :

   Soit f une fonction définie sur $]-1, +\infty[$ telle que :

   $$\begin{cases} f(x+1) = f(x) + ln(x+1) \\ \lim\limits_{n \to \infty} f(x+n) - x\,ln(n+1) - ln(n!) = 0 \end{cases}$$

   Montrer que f est égale à S

   Indication : On pourra exprimer f(x+n) en fonction de f(x)

6. Réciproque II :

   Soit f une fonction définie sur $]-1, +\infty[$ telle que :

   $$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x+1) = f(x) + ln(x+1) \\ f \text{ est convexe} \end{cases}$$

   Montrer que f est égale à S.

<u>*Indications :*</u>

On pourra introduire la fonction d définie par d(x)=f(x)-S(x) et montrer successivement que :

(i) *d est une fonction 1- périodique*

(ii) *Pour :* $n \leq x \leq n+1$

$$f'(n) \leq f'(x) \leq f'(n+1) = f'(n) + \frac{1}{n+1}$$

$$S'(n) \leq S'(x) \leq S'(n+1) = S'(n) + \frac{1}{n+1}$$

(iii) $d'(n) - \frac{1}{n+1} \leq d'(x) \leq d'(n) + \frac{1}{n+1}$

(v) *d est identiquement nulle.*

7. Soit *H(x)* l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt$.

a- Montrer que *H(x)* converge sur l'intervalle]-*1,*+∞ [

b- Montrer que la fonction *ln(H(x))* satisfait aux conditions requises en 6°. (*On pourra remarquer que la fonction* $x \longrightarrow t^x$ *est convexe sur*]-*1,*+∞[. En déduire le comportement asymptotique de la fonction *H(x)* au voisinage de +∞ .